ACTA UNIVERSITATIS AGRICULTURAE ET SILVICULTURAE MENDELIANAE BRUNENSIS
SBORNÍK MENDELOVY ZEMĚDĚLSKÉ A LESNICKÉ UNIVERZITY V BRNĚ

Ročník LII 6 Číslo 3, 2004

OPTIMÁLNÍ JÁDRA

J. Poměnková

Došlo: 26. listopadu 2003

Abstract

POMĚNKOVÁ, J.: *Optimum kernels*. Acta univ. agric. et silvic. Mendel. Brun., 2004, LII, No. 3, pp. 69-78

Kernel smoothers belong to the most popular nonparametric functional estimates. They provide a simple way of finding structure in data. Kernel smoothing can be very well applied on the regression model. In the context of kernel estimates of a regression function, the choice of a kernel from the different points o view can be investigated. The main idea of this paper is to present construction of the optimal kernel and edge optimal kernel by means of the Gegenbauer and Legendre polynomial.

kernel, optimum kernel, optimum edge kernel

ÚVOD

Jádrové funkce hrají významnou roli v jádrových odhadech, resp. v jádrovém vyhlazování. V rozmanitosti statistických křivkových odhadů včetně neparametrické regrese, odhadů hustoty a funkčních křivek jádrové vyhlazování nabízejí jednoduchý způsob jak tyto odhady konstruovat. Problematika jádrového vyhlazování je založena na odhadech, které využívají speciálních funkcí, tzv. jader, splňujících momentové podmínky. Výsledné odhady s použitím jader pak přinášejí pěknější křivky. Aby však odhad byl co nejlepší, je třeba optimalizovat parametry jádrového vyhlazování. Jedním z nich je volba jádra. Následující příspěvek zaměřuje pozornost na způsob, jak najít a zkonstruovat takovou jádrovou funkci.

ZÁKLADNÍ DEFINICE A VĚTY

Definice 2.1: *Nechť ν, k jsou nezáporná celá čísla, $0 \le \nu < k$. Nechť $K \in Lip[-1, 1]$, nosič $(K) = [-1, 1]$. Nechť K splňuje následující momentové podmínky*

$$\int_{-1}^{1} x^j K(x)dx = \begin{cases} 0 & 0 \le j < k, j \neq \nu \\ (-1)^\nu \nu! & j = \nu \\ \beta_k \neq 0 & j = k \end{cases}. \tag{1}$$

Funkce s těmito vlastnostmi se nazývá jádro řádu (ν, k) a píšeme $K \in \mathcal{M}_{\nu, k}$.

Poznámka: *Lip[a,b]* označuje třídu spojitých funkcí splňujících Lipschitzovu podmínku na $[a,b]$:

$$|g(x) - g(y)| \le L \cdot |x - y| \qquad \forall x, y \in [a,b], L > 0, L = \text{konstanta}.$$

Definice 2.2: *Nechť ν, k jsou nezáporná celá čísla taková, že platí: $0 \le \nu \le k$, ν a k mají stejnou paritu. Funkci $K \in C^\mu[-1, 1]$ nosič $(K) = [-1, 1]$, splňující podmínky*

$$(i)\ K^j(-1) = K^j(1) = 0,\ j = 0, \ldots, \mu - 1$$

$$(ii)\ \int_{-1}^{1} x^j K(x)dx = \begin{cases} 0 & 0 \le j < k, j \ne \nu \\ (-1)^{\nu}\nu! & j = \nu \\ \beta_k \ne 0 & j = k \end{cases}. \tag{2}$$

nazýváme hladkým jádrem řádu (ν, k) a třídu takových jader značíme $M^{\mu}_{\nu,k}$.

Definice 2.3: *Řekněme, že reálná funkce g definovaná na konečném nebo nekonečném intervalu* $[a, b]$ *má r znaménkových změn, jestliže existuje r+1 intervalů* $[x_{i-1}, x_i] \subset [a, b]$, $i = 1, \ldots, r + 1$, $x_0 = a$, $x_{r+1} = b$:
1. $g(x)g(y) \ge 0$ *pro každé* $x, y \in [x_{i-1}\ x_i]$ $i = 1, \ldots, r + 1$, *nebo s ostrou nerovností pro každé* $x, y, \in D_i \subset [x_{i-1}\ x_i]$, *kde* D_i *má nenulovou Lebesgueovu míru*
2. $g(x)g(y) \le 0$ *pro každé* $x, \in [x_{i-1}\ x_i]$ $y \in [y_{i-1}\ y_i]$ $i = 1, \ldots, r$.

Označme $ch(g) = r$ počet znaménkových změn funkce g na $[a, b]$.

Věta 2.4: *Nechť* $K \in M_{\nu,k}$. *Pak* $ch(K) \ge k - 2$.

Zaveďme si pojem Gegenbauerovy polynomy a uveďme si některé jejich vlastnosti, kterých dále využijeme.

Gegenbauerovy polynomy $C_n^{\alpha}(x)$ jsou polynomy ortogonální na intervalu $[-1,1]$ s váhovou funkcí $w(x) = (1 - x^2)^{\alpha-1/2}$, kde α je reálný parametr, $\alpha > 1/2$,

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{\alpha-1/2}\, C_n^{\alpha}(x) C_m^{\alpha}(x)dx = \begin{cases} 0 & m \ne n \\ \dfrac{\pi 2^{1-\alpha}\Gamma(n+2\alpha)}{n!(\alpha+n)(\Gamma(\alpha))^2} & \alpha \ne 0\ \mathrm{n} = m \end{cases}, \tag{3}$$

$\Gamma(.)$ je gama funkce.

Pro Gegenbauerovy polynomy platí následující rekurentní vztahy

$$C_{n+1}^{\alpha}(x) = \frac{2(\alpha+n)}{n+1} x C_n^{\alpha}(x) - \frac{2\alpha+n-1}{n+1} C_{n-1}^{\alpha}(x),\ \mathrm{n} \ge 1,$$

$$C_0^{\alpha}(x) \equiv 1,\ C_0^{\alpha}(x) = 2\alpha x \tag{4}$$

$$C_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{2(\alpha+n)} \left(\frac{d}{dx} C_{n+1}^{\alpha}(x) - \frac{d}{dx} C_{n-1}^{\alpha}(x) \right),\ n \ge 1, \tag{5}$$

$$C_n^{\alpha}(-x) = (-1)^n C_n^{\alpha}(x),\ x \in [-1, 1],$$

$$C_n^{\alpha}(1) = (-1)^n C_n^{\alpha}(-1) = \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}, \tag{6}$$

$$(1 - x^2) C_k^{3/2}(x) = \frac{(k + 1)\ (k + 2}{2k + 3} (P_k(x) - P_{k+1}(x)), \tag{7}$$

kde $P_k(x)$ je Legendreův polynom stupně k.

Poznámka: Z Gegenbauerových polynomů můžeme odvodit tvar tzv. Legendreových polynomů. Pro $\alpha = 1/2$

totiž platí $C_n^{1/2}(x) = P_n(x)$, kde $C_n^{1/2}(x)$ je Gegenbauerův polynom a $P_n(x)$ je Legendreův polynom. (viz. [5])
Označme

$$C_n^{\alpha}(x) = \sum_{r=0}^{n} c_{n,r}^{\alpha} x^r \text{ a } P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} p_i^k x^i.$$

Věta 2.5: *Nechť ν, $k \in$ N, (ν +k) sudé, $0 \le \nu \le k-2$. Pak platí následující vztah*

$$\nu c_{k,\nu}^{\alpha} = 2\sum_{r=\nu-1}^{k-1} (\alpha + r)\, c_{k,\nu-1}^{\alpha}. \tag{8}$$

KONSTRUKCE OPTIMÁLNÍCH JADER

Asymptotická integrální střední kvadratická chyba jádrového odhadu ν-té derivace regresní funkce závisí na jádře prostřednictvím funkcionálu

$$T(K) = \left(\left(\int_{-1}^{1} K^2(x)dx\right)^{k-\nu} \left|\int_{-1}^{1} x^k K(x)dx\right|^{2\nu+1}\right)^{\frac{2}{2k+1}}. \tag{9}$$

Pomocí minimalizace $T(K)$ můžeme najít vhodný tvar jádra tak, aby odhad $\hat{m}^{(\nu)}$ byl co nejlepší, tzn. aby průměrná střední kvadratická chyba *AMSE*, jejíž prostřednictvím můžeme měřit kvalitu odhadu, byla co nejmenší.

Budeme-li řešit variační problém

$$\text{minimum } C_K = \int_{-1}^{1} K(x)dx, \quad K \in M_{\nu,k},$$

pak jeho řešením jsou jádra nazývána jádra s minimálním rozptylem.

Věta 3.1: *Jádra s minimálním rozptylem $K \in M_{\nu,k}$ jsou jednoznačně určené polynomy stupně* $(k-2)$ *omezené na intervalu* $[-1,1]$. *Tyto polynomy jsou sudé funkce pro k sudé, liché funkce pro k liché. Tyto polynomy mají* $k-2$ *reálných kořenů na intervalu* $[-1,1]$. *Explicitní formule je dána vztahem* (10)

$$K(x) = \frac{(-1)^{\nu}\nu!}{2} \sum_{i=\nu}^{k-2} (2i+1) p_{\nu} P_i(x),$$

kde

$$P_i(x) = \sum p_r^i x^r$$

a $P_i(x)$ je Legendreův polynom.

Definice 3.2: *Nechť nosič* $(K) = [-1,1]$. *Jádro K řádu (ν, k) se nazývá optimální, jestliže*
(*i*) $ch(K) = k-2$
(*ii*) $T(K)$: $= (\int_{-1}^{1} K^2(x)dx)^{k-\nu} \left|\int_{-1}^{1} x^k K(x)dx\right|^{2\nu+1} = C_K^{k-\nu} |\beta_k|^{2\nu+1}$ *je minimální.*

Optimální polynomy *K* jsou polynomy stupně *k*, jejichž všechnykořeny jsou reálné, různé a leží v intervalu [–1,1]. Body –1, 1 jsou rovněž kořeny. Explicitní formule je pomocí Legendreových polynomů vyjádřena takto:

$$K(x) = \frac{(-1)^{\nu}\nu!}{2} \sum_{r=\nu}^{k} (2r+1) p_{\nu}^{r} P_r(x) + \beta_k \frac{2k+1}{2} p_k^k P_k(x),\ x \in [-1,1]$$

kde

$$\beta_k = \int_{-1}^{1} x^k K(x)dx = \frac{(-1)^{\nu+1}\nu!}{(2k+1)p_k^k} \sum_{r=\nu}^{k} (2r+1) p_{\nu}^{r}.$$

Věta 3.3: *Nechť* $\tilde{K} \in M_{\nu+1,\, k+1}$ *je jádro s minimálním rozptylem a* K *je optimální jádro* ($0 \leq \nu \leq k-2$, $(\nu+k)$ *sudé*). *Pak*

$$\frac{d}{dx} K(x) = \tilde{K}(x),\; x \in (-1,1) \tag{11}$$

Důkaz: Je zřejmé, že optimální jádro K můžeme vyjádřit ve tvaru

$$K(x) = \frac{\nu!(-1)^{\nu}}{2} \sum_{r=\nu}^{k} (2r+1) p_{\nu}^{r} (P_r(x) - P_k(x)). \tag{12}$$

A dále

$$\frac{d}{dx} K(x) = \frac{\nu!(-1)^{\nu}}{2} \sum_{r=\nu}^{k} (2r+1) p_{\nu}^{r} (P_r(x) - P_k(x)).$$

Přímým výpočtem a dosazením formule (5) s hodnotou α = 1/2 vyplývá

$$P_r'(x) - P_k'(x) = -\sum_{i=1}^{(k-r)/2} (2(r+2i-1)+1) P_{r+2i-1}(x)$$

a

$$\frac{d}{dx} K(x) = \frac{\nu!(-1)^{\nu+1}}{2} \sum_{r=\nu}^{k} (2r+1) p_{\nu}^{r} \sum_{i=1}^{(k-r)/2} (2(r+2i-1)+1) P_{r+2i-1}(x), \tag{13}$$

(k-r)/2 je vždy celé číslo, protože k, r jsou obě sudá nebo obě lichá. Tento fakt plyne ze vztahu (6). Připomeňme, že pro jádra s minimálním rozptylem $\tilde{K} \in M_{\nu+1,\, k+1}$ platí vztah

$$\tilde{K}(x) = \frac{(-1)^{\nu+1}(\nu+1)!}{2} \sum_{r=\nu+1}^{(k-1)} (2r+1) p_{\nu+1}^{r} P_r(x). \tag{14}$$

Koeficienty členu $P_{\nu+2j-1}(x)$, $r \leq \nu + 2j \leq k-2$ ve vyjádření (14) jsou

$$\frac{(\nu+1)!(-1)^{\nu+1}}{2} (2(r+2j+1)+1) p_{\nu+1}^{2j+1+\nu} \tag{15}$$

a odpovídající koeficienty ze vztahu (13)

$$\frac{\nu!(-1)^{\nu+1}}{2} (2(r+2j+1)+1) \sum_{r=\nu}^{k} (2r+\nu) p_{\nu}^{r}. \tag{16}$$

Naproti tomu vztah (8) nám pro α = 1/2 dává vhodné indexy

$$(\nu+1) p_{\nu+1}^{2j+1+\nu} = \sum_{r=\nu}^{2j+\nu} (2r+1) p_{\nu}^{r}. \tag{17}$$

Je zřejmé, že porovnáním vztahů (15), (16) a (17), vztah (11) platí.

Lemma 3.4: *Funkcionál* $T(K)$ *je invariantní vzhledem k transformaci* $H_\delta\colon L^2 \to L^2$, $H_\delta\colon K(\cdot) \to (\delta^{\nu+1})^{-1} K\left(\frac{\cdot}{\delta}\right)$. *Tedy platí* $T(K) = T(K_\delta)$.

Důkaz: Chceme ukázat, že funkcionály

$$T(K)=\left(\left(\int_{-1}^{1}K^2(x)dx\right)^{k-\nu}\left|\int_{-1}^{1}x^kK(x)dx\right|^{2\nu+1}\right)^{\frac{2}{2k+1}}$$

a

$$T(K_\delta)=\left(\left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{\delta^{2(\nu+1)}}K^2\left(\frac{x}{\delta}\right)dx\right)^{k-\nu}\left|\int_{-1}^{1}x^k\frac{1}{\delta^{\nu+1}}K\left(\frac{x}{\delta}\right)dx\right|^{2\nu+1}\right)^{\frac{2}{2k+1}}$$

se sobě rovnají. Proveďme v prvním i druhém členu funkcionálu T(K_δ) stejnou substituci, a to $\frac{x}{\delta}$, $x = u\delta$, $dx = \delta du$. Pak pro první člen funkcionálu platí

$$\left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{\delta^{2(\nu+1)}}K^2\left(\frac{x}{\delta}\right)dx\right)^{k-\nu}=\left(\int_{-1/\delta}^{1/\delta}\frac{\delta}{\delta^{2(\nu+1)}}K^2(u)du\right)^{k-\nu}=\frac{1}{\delta^{2(\nu+1)(k-\nu)}}\left(\int_{-1/\delta}^{1/\delta}K^2(u)du\right)^{k-\nu}$$

a pro druhý člen funkcionálu

$$\left|\int_{-1}^{1}x^k\frac{1}{\delta^{\nu+1}}K\left(\frac{x}{\delta}\right)dx\right|^{2\nu+1}=\left|\int_{-1/\delta}^{1/\delta}\frac{(u\delta)^k}{\delta^{2\nu+1}}K(u)du\right|^{2\nu+1}=\left|\frac{\delta^{k+1}}{\delta^{\nu+1}}\int_{-1/\delta}^{1/\delta}u^kK(u)du\right|^{2\nu+1}.$$

Po dosazení obdržíme

$$T(K_\delta)=\left(\left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{\delta^{2(\nu+1)}}K^2\left(\frac{x}{\delta}\right)dx\right)^{k-\nu}\left|\int_{-1}^{1}x^k\frac{1}{\delta^{\nu+1}}K\left(\frac{x}{\delta}\right)dx\right|^{2\nu+1}\right)^{\frac{2}{2k+1}}=$$

$$=\left(\frac{1}{\delta^{2(\nu+1)(k-\nu)}}\left(\int_{-1/\delta}^{1/\delta}K^2(u)du\right)^{k-\nu}\left|\frac{\delta^{k+1}}{\delta^{\nu+1}}\right|^{2\nu+1}\left|\int_{-1/\delta}^{1/\delta}u^kK(u)du\right|^{2\nu+1}\right)^{\frac{2}{2k+1}}=$$

$$=\left(\frac{\left|\delta^{(k-\nu)}\right|^{2(\nu+1)}}{\delta^{2(\nu+1)(k-\nu)}}\left(\int_{-1/\delta}^{1/\delta}K^2(u)du\right)^{k-\nu}\left|\int_{-1/\delta}^{1/\delta}u^kK(u)du\right|^{2\nu+1}\right)^{\frac{2}{2k+1}}=$$

$$=\left(\left(\int_{-1/\delta}^{1/\delta}K^2(u)du\right)^{k-\nu}\left|\int_{-1/\delta}^{1/\delta}u^kK(u)du\right|^{2\nu+1}\right)^{\frac{2}{2k+1}}.$$

Tedy skutečně platí $T(K) = T(K_\delta)$.

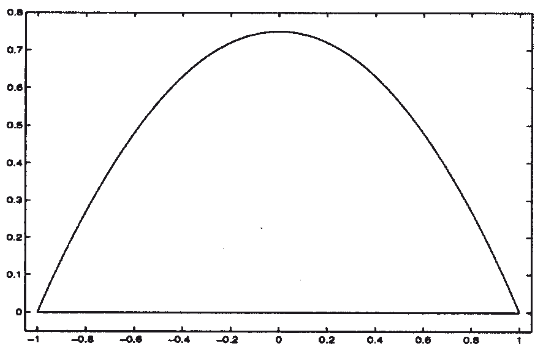
Následuje stručná ukázka optimálních jader. Označme optimální jádro K_{opt}.

$\nu = 0$	
k	K_{opt}
2	$-\frac{3}{4}(x^2-1)$
4	$\frac{15}{32}(x^2-1)(7x^2-3)$
6	$-\frac{105}{256}(x^2-1)(33x^4-30x^2+5)$
8	$\frac{315}{4096}(x^2-1)(715x^6-1001x^4+385x^2-35)$
10	$-\frac{3465}{65536}(x^2-1)(4199x^8-7956x^6+4914x^4-1092x^2+63)$

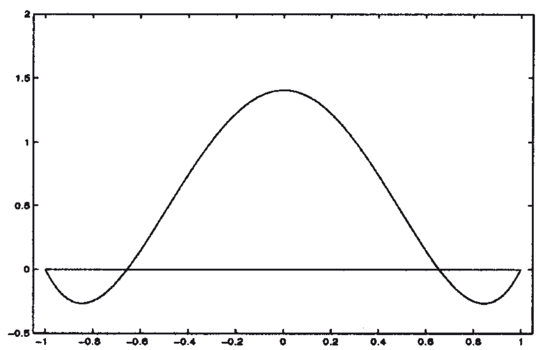
$\nu = 1$	
k	K_{opt}
3	$\frac{15}{4}x(x^2-1)$
56	$-\frac{105}{32}x(x^2-1)(9x^2-5)$
7	$\frac{315}{256}x(x^2-1)(143x^4-154x^2+35)$
9	$-\frac{3465}{4096}x(x^2-1)(1105x^6-1755x^4+819x^2-105)$
11	$\frac{45045}{65536}x(x^2-1)(260015x^8-14212x^6+10098x^4-2772x^2+231)$

$\nu = 2$	
k	K_{opt}
4	$-\frac{105}{16}(x^2-1)(5x^2-1)$
6	$\frac{315}{64}(x^2-1)(77x^4-58x^2+5)$
8	$-\frac{3465}{2048}(x^2-1)(1755x^6-2249x^4+721x^2-35)$
10	$\frac{45045}{8192}(x^2-1)(3553x^8-6392x^6+3618x^4-672x^2+21)$
12	$-\frac{45045}{262144}(x^2-1)(676039x^{10}-1562351x^8+1271974x^6-$ $429726x^4+52899x^2-1155)$

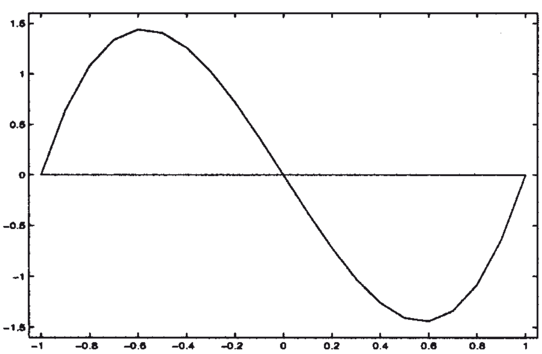
STRUČNÁ GRAFICKÁ UKÁZKA



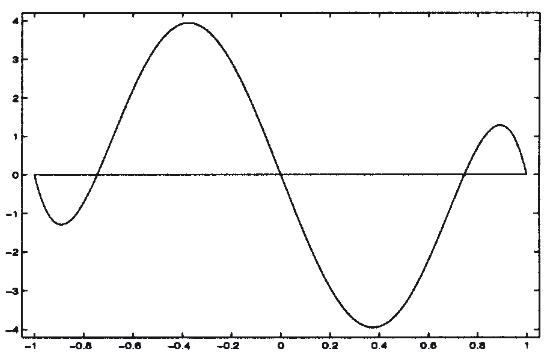
1: *Optimální jádro řádu (0,2)*



2: *Optimální jádro řádu (0,4)*



3: *Optimální jádro řádu (1,3)*



4: *Optimální jádro řádu (1,5)*

OPTIMÁLNÍ JÁDRA S NESYMETRICKÝM NOSIČEM

Věta 3.5: *Nechť* r_i, $i = 1, \ldots, (k - \nu)/2$ *jsou nezáporné kořeny polynomu* $\frac{d^\nu}{dx^\nu} C^{3/2}_{(k-1)}(x)$. *Pak pro každé*

$q_i = \frac{1-r_i}{1+r_i}$, $i = 1, \ldots, (k - \nu)/2$ *jsou optimální hraniční jádra levá polynomy stupně* $k + 2$ *definované*

$$K_{opt,L}(x) = (-1)^\nu \nu! 2^{\nu+1} \left(1 - \left(\frac{2x - q_i + 1}{q_i + 1}\right)^2\right) \times \sum_{r=\nu}^{(k-1)} \frac{C_r^{3/2}\left(\frac{2x-q_i+1}{q_i+1}\right)}{a_r(q_i + 1)} \left(\sum_{j=\nu}^{r} c_j^r \frac{(1-q_i)^{j-\nu}}{(1+q_i)^j} \binom{j}{\nu}\right), \qquad (18)$$

kde

$$a_r = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, (C_r^{3/2}(x))^2 dx$$

a $c_r^{3/2}$ *je koeficient poplynomu* $C_r^{3/2}(x) = \sum_{j=0}^{r} c_j^r x^r$.

Jádro $K_{opt,L}$ nazýváme optimální hraniční jádro levé. Platí $K_{opt,L} \in S_{\nu,k,L}$ a

$$S_{\nu,k,L} = \left\{ \begin{array}{l} K \in \boldsymbol{C}^1[-1, q],\ \text{nosič}(K) = [-1, q],\ 0 < q < 1, \\ K(-1) = K(q) = 0, \\ \int_{-1}^{q} x^j K(x) dx = \begin{cases} 0 & 0 \le j < k, \boldsymbol{j} \ne \nu \\ (-1)^\nu \nu! & j = \nu \\ \beta_k & j = k \end{cases} \end{array} \right\}.$$

Analogicky lze toto provést pro optimální hraniční jádra pravá.

Ukažme si odvození optimálního hraničního jádra levého $K_{opt,L}$ $S_{0,4,L}$. Pro $k = 0$, $\nu = 4$ platí

$$K_{opt,L}(x) = 2\left(1 - \left(\frac{2x - q + 1}{q + 1}\right)^2\right) \times \sum_{r=0}^{3} \frac{C_r^{3/2}\left(\frac{2x-q_i+1}{q_i+1}\right)}{a_r(q + 1)} \left(\sum_{j=0}^{r} c_j \frac{(1-q)^j}{(1+q)^j}\right) =$$

$$2\left(1 - \left(\frac{2x - q + 1}{q + 1}\right)^2\right) \times \sum_{r=0}^{3} \frac{C_r^{3/2}\left(\frac{2x-q_i+1}{q_i+1}\right)}{a_r(q + 1)}\ C_r^{3/2}\left(\frac{(1-q)}{(1+q)}\right),$$

kde

$C_0^{3/2}(x) = 1$, $C_1^{3/2}(x) = 3x$, $C_2^{3/2}(x) = \frac{15}{2}x^2 - \frac{3}{2}$,
$C_0^{3/2}(x) = \sum_{j=0}^{r} c_j^r x^j$,
$C_0^{3/2}(r_i) = \frac{35}{2}x^3 - \frac{15}{2}x$,

$a_0 = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, (C_0^{3/2}(x))^2 dx = \int_{-1}^{1} 1 dx = \frac{4}{3}$,
$a_1 = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, (C_1^{3/2}(x))^2 dx = 9 \int_{-1}^{1} (1 - x^2) x^2 dx = \frac{36}{15}$,
$a_2 = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, (C_2^{3/2}(x))^2 dx = \frac{9}{4} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, (5x^2 - 1)^2 dx = \frac{24}{7}$,
$a_3 = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, (C_2^{3/2}(x))^2 dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, (35x^2 - 15x)^2 dx = \frac{40}{9}$.

Nezáporný nenulový kořen polynomu

$$C_3(r) = \frac{5}{2} r(7r^2 - 3) \text{ je } r_2 = \sqrt{\frac{3}{7}}. \text{ Pak } q = \frac{1-r}{1+r} = 0.2087.$$

Označme si

$$T = \frac{2x - q + 1}{q + 1}, z = \frac{1-q}{1+q}. \tag{19}$$

Po dosazení a následné úpravě obdržíme

$$K_{\text{opt,L}} = 2(1 - T^2)\left[\frac{3C_0^{3/2}(T)}{4(q+1)}C_0^{3/2}(z) + \frac{15C_1^{3/2}(T)}{36(q+1)}C_1^{3/2}(z) + \frac{7C_2^{3/2}(T)}{24(q+1)}C_2^{3/2}(z) + \frac{9C_2^{3/2}(T)}{40(q+1)}C_3^{3/2}(z)\right] =$$

$$= \frac{(1-T^2)}{(q+1)}\left[\frac{3}{2} + \frac{15 \cdot 3T}{18}3z + \frac{7}{12}\frac{3}{2}\frac{3}{2}(5T^2 - 1)(5z^2 - 1) + 9\frac{25}{4}\frac{1}{20}(7T^3 - 3T)(7z^3 - 3z)\right]$$

$$= \frac{(1-T^2)}{(q+1)}\left[\frac{3}{2} + \frac{135}{18}Tz + \frac{21}{16}(5T^2 - 1)(5z^2 - 1) + \frac{45}{16}(7T^3 - 3T)(7z^3 - 3z)\right].$$

Dosadíme-li do T, z $K_{opt,L}$ hodnotu $q = 0.2087$, obdržíme po úpravě optimální hraniční jádro levé řádu (0,4) s nosičem [–1, 0.2087].

$$K_{opt,L}(x) = \frac{30}{49}\left(\left(3\sqrt{\frac{3}{7}} + 3\right) - \left(60\sqrt{\frac{3}{7}} + 40\right)x^2 - \left(115\sqrt{\frac{3}{7}} + 75\right)x^3 - \left(58\sqrt{\frac{3}{7}} - 38\right)x^4\right).$$

Uveďme si několik formulí pro optimální hraniční jádra levá

$K_{opt,L} \in \mathcal{S}_{\nu,k,L}$	nosič	Optimální hraniční jádra
$K_{opt,L} \in \mathcal{S}_{0,4,L}$	$[-1, 0.2087]$	$K_{opt,L}(x) = \frac{30}{49}((3\sqrt{(3/7)} + 3) - (60\sqrt{(3/7)} +$ $-(115\sqrt{(3/7)} + 75)x^3 - (58\sqrt{(3/7)} - 38)x^4)$
$K_{opt,L} \in \mathcal{S}_{0,6,L}$	$[-1, 0.0928]$	$K_{opt,L}(x) = 6.6115 - 498.9109x^2 - 2439.7293x^3 -$ $-4635.5897x^4 - 3923.9072x^5 - 1235.7473x^6$
$K_{opt,L} \in \mathcal{S}_{1,5,L}$	$[-1, 0.2679]$	$K_{opt,L}(x) = -4.1897 - 114.4646x + 1196.1257x^3 +$ $+2042.4226x^4 + 956.5718x^5$

SOUHRN

Jádrové odhady nabízejí jednoduchý způsob jak popsat strukturu dat. Jedno z nejznámějších využití myšlenky jádrových odhadů může být aplikován na jednoduchý regresní model. Ve smyslu jádrových odhadů hraje velmi důležitou roli výběr jádra. V tomto článku je podán stručný návod na konstrukci optimálních jader ve smyslu Gegenbauerových a Legendreových polynomů a následné vyvození optimálních hraničních jader.

jádro, optimální jádro, optimální hraniční jádro

LITERATURA

GASSER, T. L. , MÜLLER, H. G. a MAMMITZSCH, V.: Kernels for nonparametrics curve estimation. J. Roy. Statist. Soc. B47. 1985, 238 - 251. International Statistic Review. 1991, 59,3, pp. 373-388.

GRANOVSKY, B. L., MÜLLER, H. G.: Optimizing Kernel Methods: A UnifyingVariational Principle. International Statistic Review. 1991, 59, 3, pp. 373-388.

GRANOVSKY, B. L., MÜLLER, H. G., PFEIFER C.: Some Remarks on Optimal Kernel function. Statistic & Decision 13, München 1995, pp. 101-116.

HOROVÁ, I.: Some Remarks on Kernels, journal of Computational Analysis, Vol.2., No. 2.,2000.

HOROVÁ, I.: Gegenbauer polynomials, optimal kernels and stancu operators, Approximation Theory and Function Series Budapest (Hungary), 1995, Budapest, 1996.

SZEGÖ, G.: Ortogonal Polynomials, American Mathematical Society, Volume 23., USA 1939.

Adresa

Mgr. Jitka Poměnková, Ústav statistiky a operačního výzkumu, Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně, Zemědělská 5, 613 00 Brno, Česká republika